

wir $V_0 = 5 \text{ eV}$, $E = 3 \text{ eV}$ und setzen $m = m_e$. Dann ergibt sich $\delta \approx 0,13 \text{ nm}$, das ist etwa ein Atomdurchmesser. Die *de-Broglie-Wellenlänge* des Elektrons beträgt hier rund das Fünffache dieses Wertes. Die reflektierte Welle hat die gleiche Amplitude wie die einlaufende Welle, $|B| = |A|$.

Interessant wird der Fall $E > V_0$. In dem Fall lautet die Wellenfunktion für $x > 0$

$$\psi_2(x) = C e^{ik'x} \quad \text{mit} \quad k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$$

(wenn die Welle von links einläuft, gibt es im Bereich $x > 0$ nur eine auslaufende Welle). Aus der Stetigkeit von ψ und ψ' bei $x = 0$ folgt

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A, \quad C = \frac{2k}{k + k'} A.$$

Der wichtige Unterschied zum klassischen Teilchen ist, dass trotz $E > V_0$ ein Teil der Welle reflektiert wird. Der Reflexionskoeffizient (Wahrscheinlichkeit für Reflexion) ist

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2. \quad (3.33)$$

Zur Berechnung der Transmission müssen wir bedenken, dass die Welle links und rechts eine andere Gruppengeschwindigkeit hat: $v_g = \hbar k/m$, $v'_g = \hbar k'/m$.

Die Transmissionswahrscheinlichkeit wird

$$T = \frac{v'_g |C|^2}{v_g |A|^2} = \frac{4kk'}{(k + k')^2}. \quad (3.34)$$

Es gilt $R + T = 1$, dies drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit aus.

Die identischen Formeln erhält man für die Reflexion und Transmission von Licht an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen Brechungsindizes, man muss nur k und k' durch n_1 und n_2 ersetzen. Für senkrechte Inzidenz des Lichts findet man

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

3.6 Der Tunneleffekt

Das Eindringen der Welle in den Bereich $E < V(x)$ eröffnet die Möglichkeit, eine hinreichend dünne Potentialbarriere zu durchtunneln. Wir betrachten den in Abb. 3.8 skizzierten Potentialverlauf und nehmen $E < V_0$ an. Die Wellenfunktionen lauten für die drei Bereiche

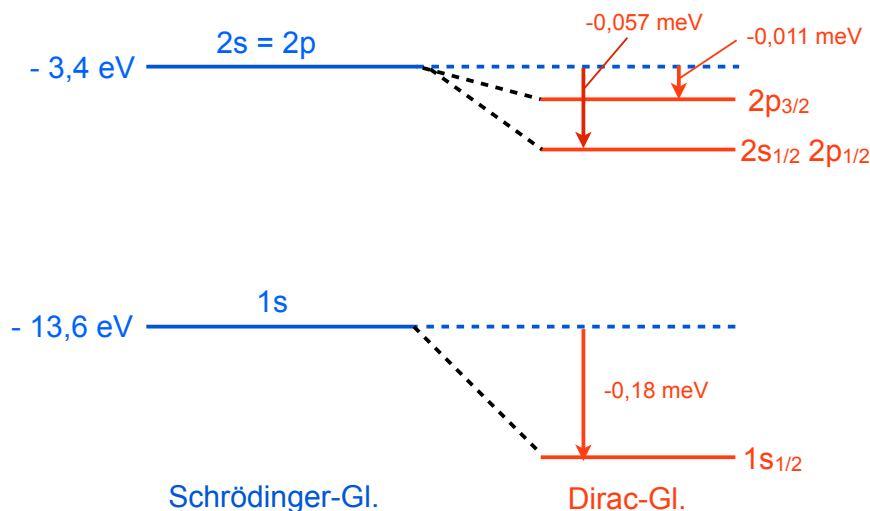


Abbildung 10.1 Feinstruktur der 1s-, 2s- und 2p-Niveaus im H-Atom.

netisches Moment voraus. Formel (10.19) ist in Übereinstimmung mit der Vorhersage der Dirac-Gleichung und mit experimentellen Resultaten.

Wir weisen darauf hin, dass es noch wesentlich feinere Strukturen in Atomen gibt: die Hyperfeinstruktur, hervorgerufen durch Wechselwirkung des Elektrons mit dem magnetischen Moment des Atomkerns, und die Korrekturen durch die Quantenelektrodynamik (Vakuum-Polarisation, Lamb-Verschiebung).

10.3 Emission und Absorption von Strahlung

In diesem Abschnitt gehen wir auf ein zentrales Thema der Quantentheorie ein, den Übergang eines Elektrons von einem Energieniveau auf ein anderes unter dem Einfluss elektromagnetischer Strahlung.

10.3.1 Optische Übergänge in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik werden optische Übergänge durch eine “semi-klassische” Methode erfasst: die Elektronen im Atom werden quantentheoretisch durch die Wellenfunktionen ψ beschrieben, während das elektromagnetische Strahlungsfeld als klassisches oszillierendes Feld behandelt wird. Das elektrische Feld der Welle hat die Form

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega_0 t = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) . \quad (10.20)$$

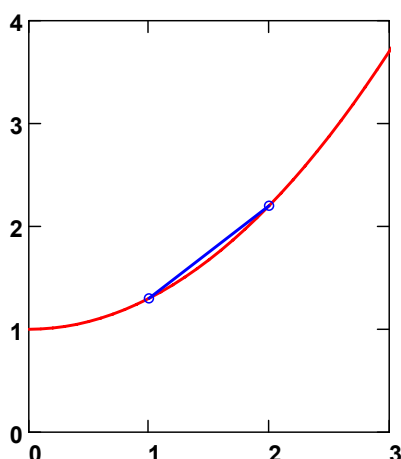


Abbildung A.3 Kurvenverlauf der Funktion $f(x) = 1 + 0,3x^2$ und Ermittlung der Steigung im Punkt $x_0 = 1$. Hier hat Δx den großen Wert $\Delta x = 1$. Lässt man $\Delta x \rightarrow 0$ gehen, so wird aus der blau gezeichneten Geraden die Tangente im Punkt x_0 .

Tabelle A.1 Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x.$$

Sie hat die Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

mit $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$, also $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (gesprochen n-Fakultät). Definitionsgemäss setzt man $0! = 1$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der natürliche Logarithmus, der nur für $x > 0$ definiert ist (im Limes $x \rightarrow 0$ gilt $\ln x \rightarrow -\infty$). Exponential- und Logarithmusfunktion werden in Abb. A.4 gezeigt.

Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 1

Quantenmechanik

Schmüser, P.

2012, XIII, 255 S. 108 Abb., 74 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-25396-6